

CONTROLE CONTINUE N° 2

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviennent pour une partie importante dans l'appréciation de la copie

Problème 1

1) a) Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de $f(x) = (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

b) donner $\frac{d^{10}f(x)}{dx^{10}} \Big|_{x=0}$

2) a) i) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f_1(x) = \ln(1 + \sin(x))$

ii) donner $f_1'(0)$, $f_1''(0)$ et $f_1'''(0)$ et donner l'équation de la tangente à Gf_1 en $(0; f_1(0))$

b) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f_2(x) = (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$

c) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f_3(x) = (1 + \tan(x))^{\frac{1}{x}}$

d) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}} - \frac{x^2}{6}}{(1 + \tan(x))^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}} - \frac{2x^2}{3}}$

3) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de $g(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$

Problème 2

1) Soit $F(x) = \int \frac{2\sqrt[3]{x} + x}{\sqrt{x^3 - 8x}} dx$

a) montrer que $\frac{t^5 + 2t}{t^3 - 8} = t^2 + \frac{3}{t-2} + \frac{5t+6}{t^2 + 2t + 4}$

b) en posant $x=t^6$, calculer $F(x)$.

2) Soit $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$. Donner la relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} et Calculer I_1 , I_2 , I_3 et I_4

3) Soit f une fonction dérivable jusqu'à l'ordre $(n+1)$ sur $[a, b]$, on pose $J_n = \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx$

Donner la relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} et Calculer J_0 , J_1 et J_2

4) Considérons l'intégrale généralisée $K_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ où $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que K_3 est convergente et calculer K_3

b) Montrer que K_n est convergente et calculer K_n pour $n \in \mathbb{N}^*$

Problème 3

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 2 \frac{dy(x)}{dx} + (1 - m^2)y(x) = xe^{kx} \quad (m \in \mathbb{R}^* \text{ et } k \in \mathbb{R})$$

a) donner la solution générale de l'équation sans second membre

b) donner la solution de l'équation complète pour $k \neq 1+m$ et $k \neq 1-m$

c) donner des formes de la solution particulière dans les autres cas.

Problème 1: 1/ a/ $f(x) = (1+x)^d = 1 + dx + \frac{d(d-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{d(d-1)\dots(d-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

b/ D'après la formule de Taylor-Lagrange :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1$$

Par identification: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{d(d-1)\dots(d-n+1)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(0) = d(d-1)\dots(d-n+1)$

2/ a/ $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$; $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$
 $f_1'(x) = \ln(1+\sin x) = \ln(1 + x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)) = (x - \frac{x^3}{6}) - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{2} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$

b/ $f_2(x) = (1+\sin x)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln(1+\sin x)} = e^{\frac{1}{n} (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x))} = e^{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)}$
 $= e \cdot e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)} = e \left(1 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}) + \frac{(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})^2}{2} + x^3 \varepsilon(x) \right)$

$$= e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + x^3 \varepsilon(x) \right) = e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{7}{24} x^3 + x^3 \varepsilon(x) \right)$$

c/ $f_3(x) = (1+\tan x)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln(1+\tan x)} = e^{\frac{1}{n} \ln(1 + (x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)))}$
 $\ln(1 + (x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x))) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{(x + \frac{x^3}{3})^2}{2} + \frac{(x + \frac{x^3}{3})^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$
 $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$

$$f_3(x) = e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)} = e \cdot e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)}$$

$$= e \left(1 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}) + \frac{(-\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3})^2}{2} + x^3 \varepsilon(x) \right) = e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + x^3 \varepsilon(x) \right)$$

$$= e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{19x^3}{24} + x^3 \varepsilon(x) \right)$$

d/ $\frac{(1+\sin x)^{1/n} - e^{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}}{(1+\tan x)^{1/n} - e^{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}}} = \frac{e(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{7}{24} x^3) - e(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}) - \frac{x^4}{6} + x^3 \varepsilon(x)}{e(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{19x^3}{24}) - e(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) - \frac{2x^4}{3} + x^3 \varepsilon(x)}$

$$= \frac{(4e-4)x^2 + x^3 \varepsilon_1(x)}{(16e-16)x^2 + x^3 \varepsilon_2(x)} = \frac{(e-1) + \varepsilon_1(x)}{4e-4 + \varepsilon_2(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{4}$$

3/ On pose $x = \frac{1}{n}$

$$g(x) = \left(\frac{x+1}{x} \right)^x = \left(\frac{1+x}{1} \right)^{1/x} = (1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x} (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4))}$$

$$= e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}$$

$$= e \left(1 + (-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}) + \frac{1}{2} (-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4})^2 + \frac{1}{6} (-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4})^3 + o(x^3) \right)$$

$$= e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^3}{48} + o(x^3) \right)$$

$$= e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16} + o(x^3) \right) = e \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

Problème 2 1/a/ $t^2 + \frac{3}{t-2} + \frac{5t+6}{t^2+2t+4} = \frac{t^2(t-2)(t^2+2t+4) + 3(t^2+2t+4) + (5t+6)(t-2)}{(t-2)(t^2+2t+4)} = \frac{t^5+2t^4}{t^3-8}$

b/ On pose $u = t^6$ alors $du = 6t^5 dt$

$$F(u) = \int \frac{2\sqrt[3]{u} + u}{\sqrt{u^3 - 8u}} du = \int \frac{2\sqrt[3]{t^6} + t^6}{\sqrt{t^{18} - 8t^6}} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^5 + 2t}{t^3 - 8} dt$$

On a $\frac{5t+6}{t^2+2t+4} = \frac{1}{2} \frac{10t+12}{t^2+2t+4} = \frac{1}{2} \frac{10t+10+2}{t^2+2t+4} = \frac{5}{2} \frac{2t+2}{t^2+2t+4} + \frac{1}{(t+1)^2+3}$

$$F(u) = 6 \left(\frac{t^3}{3} + 3 \ln(t-2) + \frac{5}{2} \ln(t^2+2t+4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t+1}{\sqrt{3}}\right) \right) + K$$

$$= 6 \left(\frac{u^2}{3} + 3 \ln(\sqrt[6]{u}-2) + \frac{5}{2} (\sqrt[3]{u} + 2\sqrt[6]{u} + 4) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt[6]{u}+1}{\sqrt{3}}\right) \right) + K$$

2/ $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$ On pose $\begin{cases} u = \frac{1}{(x^2+1)^n} = (x^2+1)^{-n} \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -n(2x)(x^2+1)^{-n-1} \\ v = x \end{cases}$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \left(\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} dx \right)$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}) \Rightarrow I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(x^2+1)^n} \right)$$

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{Arctan} x$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} ; I_3 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{4} \frac{x}{(x^2+1)^2} ; I_4 = \frac{5}{6} I_3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^3}$$

3/ On pose $\begin{cases} u' = f^{(n+1)} \\ v = (b-x)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = f^{(n)} \\ v' = -n(b-x)^{n-1} \end{cases} \quad J_n = \left[n(b-x)^{n-1} f^{(n+1)} \right]_a^b + n \int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n+1)} dx$

$$J_n = a(b-a)^{n-1} f^{(n+1)}(a) + n J_{n-1} ; J_0 = \int_a^b f'(u) du = [f(u)]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$J_1 = a f^{(2)}(a) + J_0 ; J_2 = a(b-a) f^{(3)}(a) + 2 J_1$$

4/ Deja Vu

Probleme 3 $y'' - 2y' + (1-m^2)y = u e^{kx} \quad (m \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R})$

a/ (E'): $y'' - 2y' + (1-m^2)y = 0$, $\pi^2 - 2\pi + (1-m^2)\pi = 0$, $\Delta = 4m^2$

si $m=0$ alors $\pi = -\frac{b}{2a} = 1$; $y_1 = (\alpha x + \beta) e^x$

si $m \neq 0$ alors $\Delta > 0$; $\pi_1 = 1-m$ et $\pi_2 = 1+m \Rightarrow y_1 = \alpha e^{(1-m)x} + \beta e^{(1+m)x}$

b/ la solution particuliere de (E) s'ecrit $y_0 = (ax+b) e^{kx}$, car $k \neq 1+m$ et $k \neq 1-m$

$$y_0' = (a + kax + kb) e^{kx}, y_0'' = (k^2 a + k^2 ax + k^2 b) e^{kx}$$

$$y_0'' - 2y_0' + (1-m^2)y_0 = u e^{kx} \Rightarrow a = \frac{1}{(k-1)^2 - m^2} \text{ et } b = \frac{2a(1-k)}{(k-1)^2 - m^2}$$

$$\text{donc } y = y_1 + y_0 = \alpha e^{(1-m)x} + \beta e^{(1+m)x} + \left(\frac{x}{(k-1)^2 - m^2} + \frac{2a(1-k)}{(k-1)^2 - m^2} \right) e^{kx}$$

c/ $y_0 = x(ax+b) e^{kx}$ si $k=1+m$ ou $k=1-m$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..